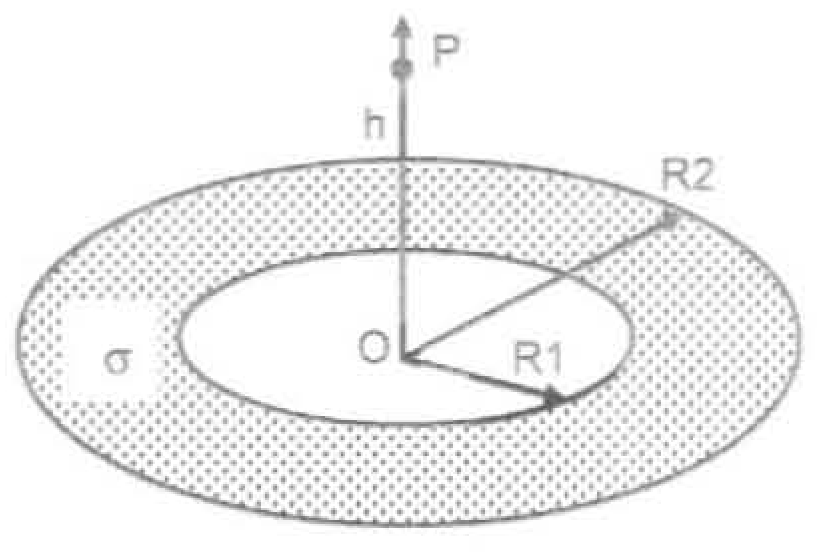
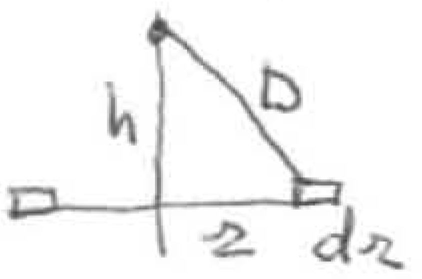
Esercizio n.1 **[10 punti]**

Una carica elettrica positiva è uniformemente distribuita, con densità superficiale σ, su di una corona circolare di raggio interno ***R1***, raggio esterno ***R2*** e centro ***O***. Scrivere l'espressione della differenza di potenziale ***ΔV=V(O)-V(P)*** fra il punto O ed un punto P posto sull'asse del disco a distanza ***h*** da O. Calcolare esplicitamente il valore di ***ΔV*** nel caso in cui ***R2 = h = 2 R1***.



Dati: $\sigma = 1{,}8 \cdot 10^{-11}\ C/m^2$; ***R1 = 10 cm.***

Il potenziale generato da una sottile corona circolare di larghezza dr e raggio r è:



$$dV(r,h) = K\frac{dq}{D} = K\frac{\sigma\, ds}{D} = K\frac{\sigma\, 2\pi r \cdot dr}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

Il potenziale di tutta la corona sarà $V(h) = \int_{R_1}^{R_2} dV =$

$$= K\sigma\pi\int_{R_1}^{R_2}\frac{2r\, dr}{\sqrt{h^2+r^2}} = K\sigma\pi\int_{R_1^2+h^2}^{R_2^2+h^2}\frac{d(r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}} =$$

$$V(h) = \frac{2\sigma\cancel{\pi}}{{}_{2}\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\left[\sqrt{R_2^2+h^2}-\sqrt{R_1^2+h^2}\right] \therefore$$

$$V(0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[R_2 - R_1\right] \therefore$$

$$\Delta V = V(0) - V(h) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[R_2 - R_1 - \sqrt{R_2^2+h^2} + \sqrt{R_1^2+h^2}\right] \therefore$$

Se $R_2 = h = 2R_1$:

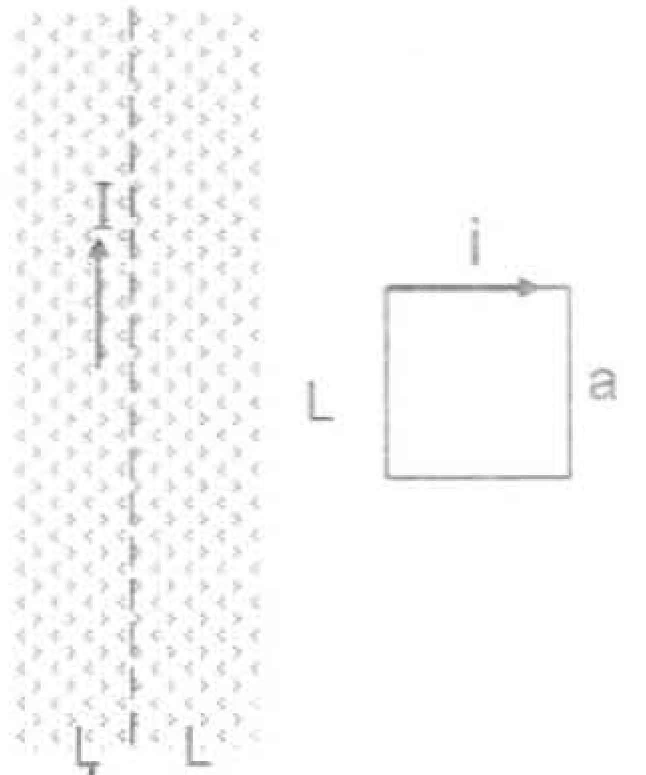
$$\Delta V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[2R_1 - R_1 - \sqrt{4R_1^2+4R_1^2} + \sqrt{R_1^2+4R_1^2}\right] =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R_1\left[\underbrace{2-1}_{1}\ \underbrace{-\sqrt{8}+\sqrt{5}}_{-0{,}6}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R_1\, 0{,}4 =$$

$$\cong \frac{\cancel{1{,}8}\cdot 10^{-11}}{2\times\cancel{9}\times 10^{-12}}\times 10^{-1}\times 0{,}4 = 0{,}04\ V = 40\ mV \therefore$$

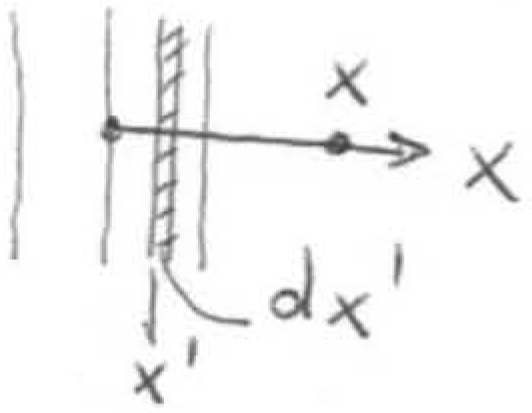
Esercizio n.2 **[10 punti]**

Consideriamo un nastro conduttore rettilineo, virtualmente infinito, di spessore trascurabile e larghezza ***2L***, percorso da una corrente costante ed uniforme I. Nel piano del nastro è posta una spira conduttrice rigida quadrata di lato ***a*** e distanza ***L*** dal bordo del nastro. Questa spira è percorsa da una corrente costante ***i***. Calcolare la forza totale esercitata sulla spira in modulo direzione e verso in funzione di [a, L, I, i]. Calcolarne il valore nel caso che a = L. Tutto il sistema si trova nel vuoto. Vedi la figura per i versi delle correnti.



Dati: I = 5 A ; i = 100 mA

Il campo $dB(x,x')$ creato da una sottile striscia larga dx' a distanza x' dall'asse, nel punto esterno $x > L$ sarà



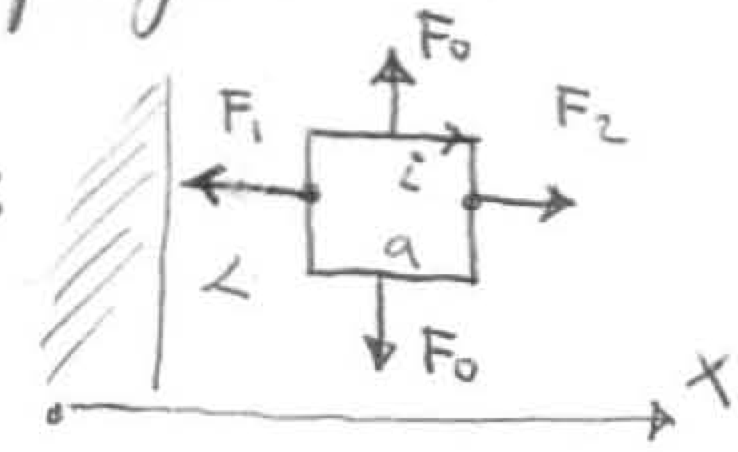
$$dB(dx',x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{(x-x')}$$ dove

la striscia dx sarà attraversata dalla corrente $dI = \frac{I}{2L}dx'$

Quindi $$B(x) = \int_{-L}^{L} dB(x',x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, 2L}\int_{-L}^{L}\frac{dx'}{x-x'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\ln\frac{x+L}{x-L}$$

La direzione di $\overline{B}$ è entrante nel foglio.

Le forze sui lati della spira sono:



con $|F_1| > |F_2|$

quindi $$\overline{F}_{TOT} = -\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \left[-ia\,B(x=2L) + ia\,B(x=2L+a)\right]\hat{x}$$

$$= ia\frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left(\ln\frac{2L+a+L}{2L+a-L} - \ln\frac{2L+L}{2L-L}\right)\hat{x} =$$

$$\therefore = \frac{iI\mu_0}{4\pi}\frac{a}{L}\left(\ln\frac{3L+a}{L+a} - \ln\frac{3\cancel{L}}{\cancel{L}}\right)$$ che per $a=L$ diventa:

$$\Rightarrow \frac{iI\mu_0}{4\pi}\left(\ln 2 - \ln 3\right) = \frac{0{,}1\times 5\cdot\cancel{4\pi}\cdot 10^{-7}}{\cancel{4\pi}}\left(\underbrace{0{,}7 - 1{,}1}_{-0{,}4}\right)$$

$$= -10^{-8}\times 5\times 0{,}4 = -2\cdot 10^{-8}\,N\ [\hat{x}]\ \therefore$$

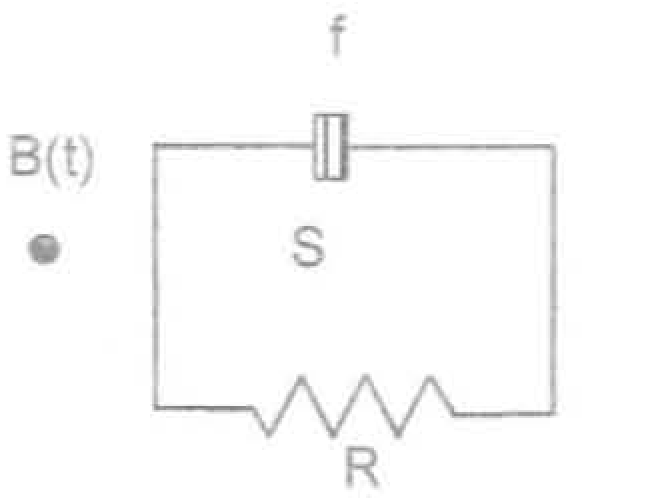
Prova scritta di Fisica 2

NOTA: il testo originale era leggermente diverso invece di "salita" ...""andamento".....

7.2.2018

Esercizio n.3 **[10 punti]**

In una zona di spazio, vuoto, è presente un cambo di induzione magnetica ***B(t)*** uniforme che sale dal valore iniziale ***B=0*** all'istante ***t=0*** fino al valore ***B**** per ***t=∞*** con salita esponenziale di costante di tempo *τ*. Su di un piano perpendicolare alle linee di forza del campo B è posta una spira di superficie ***S***, resistenza ***R*** e con in serie un generatore di f.e.m. continua ideale ***f***. 1) Trascurando l'induttanza della spira calcolare in quale istante la corrente nella spira sarà nulla, determinando anche il verso che deve avere la f.e.m. (orario oppure antiorario nel disegno mostrato). 2) Calcolare quindi l'energia dissipata nella resistenza, dovuta esclusivamente alla corrente indotta da B(t), dall'istante iniziale t=0 a quello finale t=∞.



Nota: Il campo B esce dal foglio

Dati: $B^* = 4\,T$; $\tau = 0{,}1\,ms$; $S = 1\,cm^2$; $R = 8\,\Omega$; $f = 2\,V$

Il campo B ha un andamento del tipo $B(t) = B^*\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

La corrente indotta sarà $i_i = \frac{f_i}{R} = \frac{1}{R}\frac{d\phi(B)_S}{dt} =$

$= \frac{1}{R}\left[\underbrace{\frac{SB^*}{\tau}}_{f^B_{MAX}} e^{-t/\tau}\right]$ in verso orario. $f^B_{MAX} = \frac{SB^*}{\tau} = \frac{10^{-4}\cdot 4}{10^{-4}} = 4\,V$

La corrente totale $i = i(f) + i(f^B)$ sarà nulla quando

$|i| = |i(B)|$ quindi se $f = f_B^{MAX} e^{-t/\tau}$ da cui

$\ln\frac{f}{f_{MAX}} = -t/\tau$ $\quad t = -\tau\ln\frac{f}{f_{MAX}}$ ∴ $\quad t = -10^{-4}\ln\frac{2}{4} = 10^{-4}\cdot 0{,}7\,s$

$= 7\cdot 10^{-5}\,s$

$= 70\,\mu s$ ∴

f deve essere tale da far circolare la corrente $i = f/R$ in verso antiorario ∴

l'energia $\mathcal{E} = \int_0^\infty W(i_B)\,dt = \int_0^\infty i^2(B)\cdot R\,dt =$

$= \int_0^\infty \frac{1}{R^2} f_B^{MAX\,2} e^{-2t/\tau}\cdot R\,dt = \frac{S^2 B^{*2}}{2R\tau}$ ∴

$= \frac{f_{MAX}^2\,\tau}{2R} = \frac{\cancel{16}}{\cancel{2\cdot 8}}10^{-4} = 0{,}1\,mJ$ ∴

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.

$\sqrt{3} = 1{,}7$; $\sqrt{5} = 2{,}2$; $\sqrt{6} = 2{,}4$; $\sqrt{7} = 2{,}6$; $\sqrt{8} = 2{,}8$; $\ln 2 = 0{,}7$; $\ln 3 = 1{,}1$; $\ln 4 = 1{,}4$; $\ln 5 = 1{,}6$